1183　球面微分 $\frac{1}{2}$ ナル函數ニ就キテ

春木　博

今、$f(z)$ ヲ $|z|\leqq 1$ デ一價正則ナル函数トシ、且ツ $|z|=1$ 上ノ任意ノ点 $z=z_0$ ニ於ケル球面微分 $\frac{|f'(z_0)|}{1+|f(z_0)|^2}$ ガ常ニ、$\frac{1}{2}$ ナリトスル。更ニ $f(z)$ ニ 條件 $f(1)=1$, $f(-1)=-1$ ナル條件ヲツケル。

此時 $f(z)$ ハ如何ナル函数トナルカ？

結果ハカヽル函数ハ $f(z)=z$, $f(z)=\frac{1+i\alpha z}{z+i\alpha}$ $\left(\begin{smallmatrix}|\alpha|>1\\ \alpha\text{ハ実数}\end{smallmatrix}\right)$ ナル二ツノ函数ニ限ル。以下ニ之ヲ証明シヨウ。

(証明) 今 $f(1)\ (=1)$, $f(-1)\ (=-1)$ ノ w 平面上ノ像点ヲ夫々 A（1ヲアラハス）, B（−1ヲアラハス）トシ, *Riemann* 球面上ノ像点ヲ夫々 A^*, B^* トシ，更ニ z 平面上ノ半円 $z=e^{i\theta}$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ ノ w 平面上ノ像曲線ヲ $\mathfrak{C}$, 又 *Riemann* 球面上ノ像曲線ヲ K トスル。

次ニ $\displaystyle\int_0^\pi \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}d\theta$ ナル積分ヲ考ヘレバ（但シ $z=e^{i\theta}$）

假定ニヨリ $\displaystyle\int_0^\pi \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}d\theta=\frac{1}{2}\pi$ $(z=e^{i\theta})$

然ルニ $\displaystyle\int_0^\pi \frac{|f(z)|}{1+|f(z)|^2}d\theta$ ハ *Riemann* 球面上

A^*（複素数1ヲアラハス）, B^*（複素数 −1ヲアラハス）

ヲ結ブ曲線ノ長サ $l(K)$ ヲ与ヘル。

シカモ K ハ球面上直径ノ両端 A^*, B^* ヲ結ブ曲線デア

ルカラ

$$K\text{ノ長サ}=\ell(K)\geqq\frac{1}{2}\pi$$

等号ガ成立スルノハ大円ノ半分ノ弧即チ半円ノ時ニ限ルカラKハ実ハ半円ナルコトガ判ツタ。從ツテ又、ⓒハA, Bヲ通ル円ノ弧トナル。（必ズシモ半円トハナラナイ）

今度ハZ平面上実軸ノ下ノ半円，$Z=e^{i\theta}(\pi\leqq\theta\leqq2\pi)$ノ$f(z)$ニヨルRiemann球面上及ビW平面上ノ写像曲線ヲ考ヘレバ同様ニシテ、夫々半円，円ノ弧トナル。假定ヲ使ヘバ$|z|=1$上デハ$f'(z)\neq0$ナルコトガ判ルカラ、結局$|z|=1$ノ$f(z)$ニヨルRiemann球面上ノ写像曲線ハ大円トナリ、周ハ一対一ニ対應スル。

從ツテ又、$f(z)$ニヨル$|z|=1$ノW平面上ノ写像曲線ハ，A, Bヲ通ル円デアル。併シ之ハ必ズシモ単位円デハナイ。

単位円デナイ時ハ之ヲ単位円ニスルタメ、αヲ$|\alpha|>1$ナル適当ナ実数トスルトキ. Riemann球面ノ廻轉$\frac{1-i\alpha z}{z-i\alpha}$ヲ行ヘバ単位円ニナホル。

次ニ議論ヲ二ツノ場合ニ別ケテ、進メヨウ。

（第一ノ場合）$f(z)$ニヨル$|z|=1$ノW平面上ノ像曲線ガ始メカラ単位円ナルトキ

此ノ時ハ結局$f(z)=z$トナル。

（第二ノ場合）$f(z)$ニヨル$|z|=1$ノW平面ヘノ像曲線ガ単位円デナイトキ。

此ノ時ハ変換 $g(z)=\dfrac{1-i\alpha f(z)}{f(z)-i\alpha}$ $\left(\begin{array}{c}|\alpha|>1\\ \alpha\text{ハ実数}\end{array}\right)$

ニ依リ $|z|=1$ ノ $g(z)$ ニヨル w平面上ノ像曲線ハ単位円トナル。

α ノ定メ方カラ容易ニ判ルヤウニ. $f(z)-i\alpha\neq 0$ ナル故 $g(z)$ ハ勿論 $|z|\leqq 1$ デ正則デ、シカモ $|z|=1$ ナルトキハ $|g(z)|=1$ デアル。

之ヨリ結局 $g(z)=z$

即チ $f(z)=\dfrac{1+i\alpha z}{z+i\alpha}$ （α ハ $|\alpha|>1$ ナル実数）

勿論之ハ与ヘラレタ條件ニ満足スルカラ

結局求ムル函数ハ

$$z,\ \frac{1+i\alpha z}{z+i\alpha}\quad(\alpha\text{ハ}|\alpha|>1\text{ ナル実数})$$

ノ二ツニ限ルコトガ判ツタ。

―（完）―